corrigé partiel octobre 2008
Physique - Thermodynamique statistique

I : 1) Ensemble statistique de micro-états d'un système fermé en contact avec un thermostat qui impose au système sa température T.
les paramètres fixés sont T, N et V - Le système échange de l'énergie avec le thermostat $\longrightarrow$ E fluctue autour de $\langle E\rangle$

2) Z = somme sur tous les micro-états accessibles au système

$$Z = \sum_{(\ell)} e^{-\beta E_\ell}$$

3) $P_\ell = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\ell}$, $\sum_{(\ell)} P_\ell = 1$

4) $$\langle E\rangle = \sum_{(\ell)} E_\ell P_\ell = \frac{1}{Z}\sum_{(\ell)} E_\ell e^{-\beta E_\ell}$$

5) $$S = -k_B \sum_{(\ell)} P_\ell \ln P_\ell = -k_B \sum_{(\ell)} \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\ell} \ln\left(\frac{1}{Z} e^{-\beta E_\ell}\right)$$

$$S = + k_B \sum_{(\ell)} \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\ell}\left\{(-\ln Z) - \beta E_\ell\right\}$$

$$S = +\beta \frac{k_B}{Z} \sum_{(\ell)} E_\ell e^{-\beta E_\ell} + k_B\left(\sum_{(\ell)} e^{-\beta E_\ell}\right)\frac{\ln Z}{Z}$$

$$S = \frac{\langle E\rangle}{T} + k_B \ln Z$$

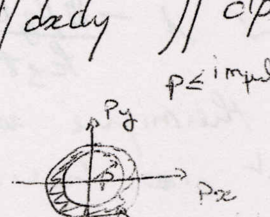
6) $U \equiv \langle E\rangle$ $\qquad F = U - TS = \langle E\rangle - TS$

$$F = -k_B \ln Z$$

II. 1) $\{x, y, p_x, p_y\}$ dimension 4

2) $$\Gamma = \iiiint dx\,dy\,dp_x\,dp_y = \iint dx\,dy \iint_{p \le \text{impulsion} < p+dp} dp_x\,dp_y$$

$$\Gamma = L^2\, 2\pi p\, dp$$



3) $\left.\begin{array}{l}\Delta p_x \Delta x = \hbar \\ \Delta p_y \Delta y = \hbar\end{array}\right\}$ $\hbar^2$

$$\Omega^* = \frac{\Gamma}{} = \frac{L^2}{} 2\pi p\, dp$$

$$\frac{\ldots}{dE} = \frac{L^2}{h^2}\, 2\pi\, \sqrt{2mE}\ \ \frac{1}{2}\sqrt{2m}\ \sqrt{E}\ \ \frac{dE}{dE}$$

$p^2 = p_x^2 + p_y^2$ et $E = \dfrac{p^2}{2m}$

$$\boxed{\rho(E) = \frac{L^2}{h^2}\, 2\pi m}$$

III 1) $\Omega^* = \dfrac{N!}{n!\,(N-n)!}$ 2) $S^* = k_B \ln \Omega^*$

$$S^* = k_B \left\{ N\ln N - \cancel{N} - n \ln n + \cancel{n} - (N-n)\ln(N-n) \cancel{+ (N-n)} \right\}$$

$$S^* = N k_B \left\{ \ln N - \ln(N-n) \right\} + n k_B \left\{ \ln(N-n) - \ln n \right\}$$

3) $$\frac{dS^*}{dn} = \frac{N k_B}{(N-n)} + n k_B \left\{ -\frac{1}{(N-n)} - \frac{1}{n} \right\} + k_B \left\{ \ln(N-n) - \ln n \right\}$$

$$= \cancel{\frac{N k_B}{(N-n)}} - \cancel{\frac{n k_B}{(N-n)}} \cancel{- k_B} + k_B \ln\left(\frac{N-n}{n}\right)$$

$$= k_B \ln \frac{(N-n)}{n}$$

4) T^* tq $\dfrac{1}{T^*} = \left(\dfrac{\partial S^*}{\partial E}\right)_{V,N}$ 5) $\dfrac{1}{T^*} = \left(\dfrac{\partial S^*}{\partial n}\right)_{V,N} \left(\dfrac{\partial n}{\partial E}\right)_{V,N}$

$$\frac{1}{T^*} = \left(-\frac{1}{2\mu_z B}\right) k_B \ln \frac{(N-n)}{n}$$

si $N - n > n$

$\ln\left(\dfrac{N-n}{n}\right) > 0 \implies T^* < 0$

6) $$-\frac{2\mu_z B}{k_B T^*} = \ln \frac{(N-n)}{n} \qquad \frac{N-n}{n} = e^{-\frac{2\mu_z B}{k_B T^*}}$$

$$n = \frac{N}{e^{-\frac{2\mu_z B}{k_B T^*}} + 1} \implies$$

$\mu_z B \gg k_B T^*$ $\quad e^{-\frac{2\mu_z B}{k_B T^*}} \longrightarrow 0$

$n \longrightarrow N$

tous les moments magnétiques sont alignés par le champ $\vec{B}$ dans le même sens

$\mu_z B \ll k_B T^*$ hautes températures

$$e^{\frac{-2\mu_z B}{k_B T^*}} \sim 1 - \frac{2\mu_z B}{k_B T^*} \sim 1 \qquad n \longrightarrow \frac{N}{2}$$

l'agitation thermique est très supérieure à l'énergie du champ
il y a autant de chance d'aligner les dipôles dans le sens du champ que dans le sens inverse à cause de l'agitation thermique (désorientation maximale)